

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-9 februarie 2013

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Barem Clasa X

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in (-\infty, 1] \\ mx + 4, & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

a) Pentru $m = -2$ trasați graficul funcției

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care funcția este surjectivă.

Soluție:

- a) trasarea corectă a graficului.....4p
- b) Restricția funcției f la intervalul $(-\infty, 1]$ este $2x+4$, o funcție crescătoare care are ca imagine intervalul $(-\infty, 6]$0,5p
- Funcția f este surjectivă dacă și numai dacă restricția $mx+4$ a funcției f la intervalul $(1, \infty)$, are ca imagine o mulțime, care reunită cu $(-\infty, 6]$ să ne dea \mathbb{R}0,5p
- Este necesar ca $m > 0$ 0,5p
- În acest caz imaginea restricției este $(m + 4, \infty)$0,5p
- $m + 4 \leq 6 \Rightarrow m \leq 2$0,5p
- Deci $m \in (0, 2]$0,5p

2. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1007}} + \frac{1}{\sqrt{2013-x}+\sqrt{1007}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2013-x}}.$$

Soluție:

- Condiții de existență $x \geq -1, x \leq 2013$, deci $x \in [-1, 2013]$1p
- Putem face calculul mai ușor notând $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{1007} = b, \sqrt{2013-x} = c$1p
- Ecuația devine $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} = \frac{2}{a+c}$1p
- Sau $a^2 + c^2 = 2b^2$2p
- Sau $x+1+2013-x=2 \cdot 1007$, relație adevărată pentru orice $x \in [-1, 2013]$1p
- Deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, 2013\}$1p

3. a) Așezați în ordine crescătoare numerele $1, \frac{1}{2} \ln 4, \ln(\sqrt[3]{27}), \pi$.

b) Fie a, b, c trei numere reale mai mari ca 1. Să se afle valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab).$$

Soluție:

- a) $1 = \ln e, \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2, \ln(\sqrt[3]{27}) = \ln 3, \pi = \ln(e^\pi)$ 1p
- Deci $\frac{1}{2} \ln 4 < 1 < \ln(\sqrt[3]{27}) < \pi$ 1p
- b) $E = \log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b$1p
- $= \log_a b + \frac{1}{\log_a b} + \log_b c + \frac{1}{\log_b c} + \log_c a + \frac{1}{\log_c a}$1p
- Deoarece a, b, c sunt mai mari ca 1 atunci $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ sunt numere reale pozitive.....1p
- Se aplică inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2$, pentru orice x real pozitiv.....1p
- Deci $E \geq 6$1p

4. a) Rezolvați în numere reale ecuația $3^x - 4^x = \sqrt{9^x - 12^x}$.

b) Rezolvați în numere reale sistemul $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Soluție:

- a) condiții $9^x - 12^x \geq 0, 3^x - 4^x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$1p
prin ridicare la pătrat se obține $16^x = 12^x$1p
deci $x=0$ soluție.....1p
- b) $y = 1 - x$
 $3^x + 3^{1-x} = 4$1p
 $3^x + \frac{3}{3^x} = 4$1p
 $3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$1p
 $3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$1p